

Polinomi

[T] Bezuvov stav: Neka je $f(x)$ polinom nad poljem $\mathbb{F}$ i $a \in \mathbb{F}$. Ostatak pri deljenju polinoma $f(x)$ sa $(x-a)$ je $f(a)$.

[T] Osnovni stav algebre: svaki polinom nad poljem $\mathbb{C}$ koji nije nultog stepena ima bar jednu nulu.

[T] Svaki polinom n -tog stepena nad $\mathbb{C}$ ima tačno n nula.

[T] Ako je $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ sa celobrojnim koeficijentima i $\frac{p}{q}$ nula tog polinoma ($\text{NZD}(p, q) = 1$) $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$

[1.] Faktorisati:

a) $2x^6 - x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 7x - 2$ nad $\mathbb{C}$ i nad $\mathbb{R}$

b) $x^4 + x^2 + 1$ nad $\mathbb{R}$

c) $x^4 + 1$ nad $\mathbb{R}$

a)

	2	-1	-4	+6	-8	+7	-2
1	2	1	-3	3	-5	2	0
1	2	3	0	3	-2	0	0
X	2	5	5	8	6	X	
X	2	4	-1	4	6	X	
2	2	7	14			X	
-2	2	-1	2	-1	0	0	0
-2	2	-5	12		X		
1/2	2	0	2	0	0	0	0

$$2x^2 + 0x + 2$$

$$p_1(x)$$

$$p \in \{\pm 1, \pm 2\} \quad \pm 1, \pm 2$$

$$q \in \{\pm 1, \pm 2\} \quad \pm 1/2$$

$$p_1(x) = (x-1)^2(x+2)(x-\frac{1}{2})(2x^2+2)$$

Rešenje:

nad $\mathbb{R}$:

$$2(x^2+1)(x-1)^2(x+2)(x-\frac{1}{2})$$

nad $\mathbb{C}$:

$$2(x+i)(x-i)(x-1)^2(x+2)(x-\frac{1}{2})$$

b) $x^4 + x^2 + 1$

$$x^4 + x^2 + 1 = \underbrace{x^4 + 2x^2 + 1 - x^2}_{(x^2+1)^2 - x^2} = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

c) $x^4 + 1$

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

[2.] Neka je $p(x)$ polinom koji pri deljenju sa $x-1$ daje ostatak 1, a pri deljenju sa $x-2$ ostatak 3.

Naći ostatak pri deljenju tog polinoma sa $(x-1)(x-2)$.

$$p(x) = (x-1)(x-2)q(x) + \underbrace{ax+b}_{\text{ostatak}}$$

$$\rightarrow p(1) = 1$$

$$\rightarrow p(2) = 3$$

pašto delimo sa polinomom, koji je drugog stepena, ostatak je stepena ≤ 1 .

$$1 = p(1) = (1-1)(1-2)q(1) + a \cdot 1 + b$$

$$3 = p(2) = (2-1)(2-2)q(2) + a \cdot 2 + b$$

$$1 = a + b$$

$$3 = 2a + b$$

$$\begin{cases} 2 = a \\ b = -1 \end{cases}$$

Traženi ostatak je, dakle, $2x-1$.

[3.] Dokazati da je a višestruka nula polinoma $p(x)$ ako i samo ako važi $p(a) = p'(a) = 0$.

($\Rightarrow$) Neka je a višestruka nula.

$$p(x) = (x-a)^k q(x) \quad k \geq 2 \quad p(a) = 0$$

$$p'(x) = k \cdot (x-a)^{k-1} \cdot q(x) + (x-a)^k \cdot q'(x)$$

$$p'(a) = k(a-a)^{k-1} \cdot q(a) + (a-a)^k \cdot q'(a) = 0$$

($\Leftarrow$) Neka je $p(a) = p'(a) = 0$.

$$p(x) = (x-a) \cdot q(x)$$

$$p'(x) = 1 \cdot q(x) + (x-a) \cdot q'(x)$$

$$p'(a) = q(a) + (a-a) \cdot q'(a) = 0 \Rightarrow q(a) = 0$$

$$q(x) = (x-a) \cdot s(x)$$

$$p(x) = (x-a)(x-a) \cdot s(x)$$

$$p(x) = (x-a)^2 \cdot s(x)$$

a je bar dvostruka nula, tj. jeste višestruka nula.

[4.] Za koje vrednosti parametra a polinom $p(x) = x^5 - 5x - a$ ima višestruku nulu?

$$p(x) = x^5 - 5x - a$$

$$p'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

Kandidati za višestruku nulu su: $\pm 1, \pm i$

$$1: p(1) = 0 \quad \text{tj.} \quad 1^5 - 5 \cdot 1 - a = 0 \Rightarrow 1 - 5 - a = 0 \Rightarrow -4 - a = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$-1: p(-1) = 0 \quad \text{tj.} \quad (-1)^5 - 5 \cdot (-1) - a = 0 \Rightarrow -1 + 5 - a = 0 \Rightarrow 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$i: p(i) = 0 \quad \text{tj.} \quad (i)^5 - 5i - a = 0 \Rightarrow i - 5i - a = 0 \Rightarrow -4i - a = 0 \Rightarrow a = -4i$$

$$-i: p(-i) = 0 \quad \text{tj.} \quad (-i)^5 - 5(-i) - a = 0 \Rightarrow -i + 5i - a = 0 \Rightarrow 4i - a = 0 \Rightarrow a = 4i$$

[5.] Naći zbir koeficijenata uz članove sa neparnim stepenima polinoma $(x^5 + x - 1)^{2025}$.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P(0) = a_0$$

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \leftarrow \text{zbir svih koef.}$$

$$P(-1) = (-1)^n a_n + \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots &= P(1) \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots &= P(-1) \end{aligned}$$

$$2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + \dots = P(1) - P(-1)$$

$$\text{Roi:} \quad a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{P(1) - P(-1)}{2}$$

Vijetove veze

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ - nule polinoma $p(x)$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

[6.] Naći sve vrednosti realnog parametra a tako da nule α, β, γ polinoma $p(x) = x^3 - 6x^2 + ax + a$ zadovoljavaju jednakost: $(\alpha-3)^2 + (\beta-3)^2 + (\gamma-3)^2 + 2\beta\gamma = 0$.

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-6}{1} = 6$$

$$2\beta + 2\gamma + \beta\gamma = a$$

$$2\beta\gamma = -a$$

Znamo

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 + \beta^2 - 6\beta + 9 + \gamma^2 - 6\gamma + 9 + 2\beta\gamma = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 6(\alpha + \beta + \gamma) + 27 + 2\beta\gamma = 0$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(2\beta + 2\gamma + \beta\gamma) - 6(\alpha + \beta + \gamma) + 27 + 2\beta\gamma = 0$$

$$6^2 - 2 \cdot a - 6 \cdot 6 + 27 - a = 0$$

$$-3a + 27 = 0 \Rightarrow a = 9$$

[7.] Neka su x_1 i x_2 nule polinoma $x^2 - 2025x + 1$.

Dokazati da je $x_1^n + x_2^n$ prirodan broj za sve $n \in \mathbb{N}$.

$$n=1 \quad x_1 + x_2 = -\frac{-2025}{1} = 2025$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1$$

baaa.

1.H. pp. da je tvr. tačno za sve prirodne brojeve $< n$.

1.K. Dokazujemo za n .

$$x_1^n + x_2^n = (x_1^{n-1} + x_2^{n-1})(x_1 + x_2) - x_1^{n-1}x_2 - x_1 x_2^{n-1}$$

$$= (x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) \underbrace{(x_1 + x_2)}_{2025} - \underbrace{x_1 x_2}_1 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

sigurno jeste ceo broj. Pitom jeste i pozitivan.

(Znamo $x_1, x_2 > 0$, $x_1 + x_2 > 0$. $\Rightarrow x_1 > 0$, $x_2 > 0 \Rightarrow x_1^n > 0$, $x_2^n > 0$)

[8.] Da li postoji polinom $p(x)$ sa celobrojnim koeficijentima tako da $p(5) = 4$ i $p(3) = 1$?

Pp. da postoji takav polinom: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$p(5) = a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_0 = 4$$

$$p(3) = a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 1$$

$$a_n(5^n - 3^n) + a_{n-1}(5^{n-1} - 3^{n-1}) + \dots + a_2(5^2 - 3^2) + a_1(5 - 3) = 3$$

$$(5-3)$$

$$2$$

$$(5-3)$$

$$2$$

$$(5-3)$$

$$2$$

$$2$$

$$2 \mid \text{L.S.} \quad \wedge \quad \text{D.S.} = 3 \quad \downarrow$$

[9.] Odrediti koeficijente a i b tako da polinom $p(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, bude deljiv sa $(x-1)^2$.

Ako je $p(x)$ deljiv sa $(x-1)$, onda je 1 bar dvostruka nula polinoma $p(x) \Rightarrow p(1) = 0$

$$p'(1) = 0$$

$$a = -b - 1$$

$$p(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + 1 = 0 \quad \text{tj.} \quad a + b + 1 = 0$$

$$p'(1) = 0 \Rightarrow a(n+1) \cdot 1 + b \cdot n \cdot 1 = 0 \quad \text{tj.} \quad (n+1)a + bn = 0$$

$$p'(x) = a(n+1) \cdot x^n + b \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$\Rightarrow -(n+1)(b+1) + bn = 0$$

$$-nb - n - b - 1 + bn = 0$$

$$b = -n - 1 \Rightarrow a = +n + 1 - 1 \Rightarrow a = n$$

[10.] x_0 - trostruka nula

$$p(x_0) = 0$$

$$p'(x_0) = 0$$

$$p''(x_0) = 0$$

dvu opcije:

$$x_1 = 2$$

$$a = 28 \quad b = -24$$

$$x_2 = -3$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{13}{5} \quad b = -\frac{9}{16}$$

$$x_2 = \frac{9}{2}$$